

# *A note on Synchronized Automata and Road Coloring Problem*

Karel Culik II, Juhani Karhumäki et Jarkko Kari  
[CKK02]

Emmanuel Cornet  
École normale supérieure

Cours de Théorie des automates – MPRI

18 février 2005

# Plan

## Road Coloring Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples  
L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants

Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

La  
construction  
sur un  
exemple

- 1 La conjecture « Road Coloring »
  - Définitions de départ
  - Énoncé de la conjecture
- 2 Vers un meilleur étiquetage...
  - Encore des prérequis
  - Exemples
  - L'automate qui reconnaît les mots synchronisants
  - Les étiquetages forts
- 3 La construction
  - Une conjecture équivalente
  - La construction sur un exemple

# Définitions de départ

Road Coloring  
Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ

Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples

L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants

Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

La  
construction  
sur un  
exemple

## Définition

Un graphe orienté est **acceptable** si

- il est fortement connexe ;
- de chaque sommet partent le même nombre d'arêtes.

## Définition

Un graphe est **primitif** si toutes les longueurs des boucles de  $G$  sont premières entre elles (leur pgcd vaut 1).

Un graphe est non primitif si, et seulement si, il est cyclique.

## Définition

Un automate  $\mathcal{A}$  est **synchronisé** en un état  $q$  s'il existe un mot  $w$  (dit synchronisant) qui amène tous les états de  $\mathcal{A}$  dans  $q$ .

Un automate déterministe et synchronisé en un état est synchronisé en tous ses états (on dira simplement qu'il est synchronisé).

# Énoncé de la conjecture

## Road Coloring Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »  
Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples  
L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants  
Les  
étiquetages  
forts

La  
construction  
Une  
conjecture  
équivalente  
La  
construction  
sur un  
exemple

## Définition

Un graphe est **synchronisable** s'il existe un étiquetage faisant de lui un automate synchronisé.

## Conjecture

*Tout graphe acceptable et primitif est synchronisable.*

Si cette conjecture est vraie, elle est optimale : aucun graphe non primitif n'est synchronisable.

# Encore quelques prérequis

## Road Coloring Problem

Emmanuel Cornet

La conjecture  
« Road Coloring »  
Définitions de départ  
Énoncé de la conjecture

Vers un meilleur étiquetage...

### Encore des prérequis

Exemples  
L'automate qui reconnaît les mots synchronisants

Les étiquetages forts

La construction

Une conjecture équivalente

La construction sur un exemple

## Définition

Une paire d'états  $(p, q)$  d'un automate est **réductible**, ce que l'on note  $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$ , s'il existe un mot  $w$  tel que  $\delta(p, w) = \delta(q, w)$  (ie  $w$  emmène  $p$  et  $q$  dans le même état).

## Définition

Une paire d'états  $(p, q)$  d'un automate est **stable**, ce que l'on note  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$ , si pour tout mot  $u$  il existe un mot  $w$  tel que  $\delta(p, uw) = \delta(q, uw)$ .

## Lemme

*La relation  $\sim$  n'est pas toujours transitive ; en revanche,  $\equiv$  est une relation d'équivalence.*

# Encore des définitions ??

## Road Coloring Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »  
Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

### Encore des prérequis

Exemples  
L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants  
Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

La  
construction  
sur un  
exemple

## Définition

On dit qu'une relation est **discrète** si chaque élément est uniquement en relation avec lui-même.

## Définition

Un étiquetage tel que la relation de réduction  $\sim$  est une relation d'équivalence non discrète est un **étiquetage fort**.

C'est quand l'étiquetage est fort (*ie* pour une grande classe d'automates) que la construction ci-après permet de « mieux synchroniser » l'automate.

# Deux exemples

## Road Coloring Problem

Emmanuel Cornet

La conjecture « Road Coloring »

Définitions de départ  
Énoncé de la conjecture

Vers un meilleur étiquetage...

Encore des prérequis

### Exemples

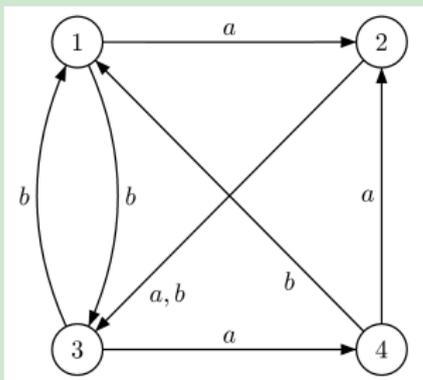
L'automate qui reconnaît les mots synchronisants  
Les étiquetages forts

La construction

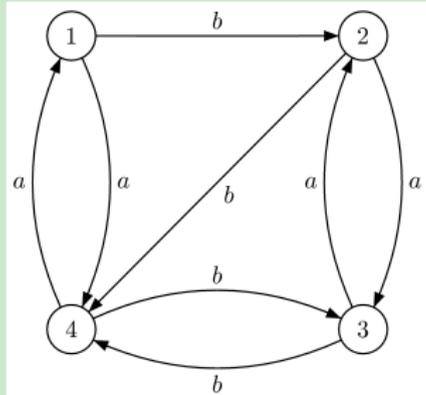
Une conjecture équivalente

La construction sur un exemple

## Exemples



$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

- $\mathcal{A}$  :  $baaab$  (par exemple) est un mot synchronisant (vers 1). La relation de réductibilité est la relation « pleine ».
- $\mathcal{B}$  : pas de mot synchronisant. La relation de réductibilité est  $\{(2, 3); (3, 2); (1, 4); (4, 1)\}$ .

Dans les deux cas,  $\sim$  et  $\equiv$  sont confondues et l'étiquetage est donc fort.

# L'automate qui reconnaît les mots synchronisants

Road Coloring  
Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples

**L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants**

Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

La  
construction  
sur un  
exemple

$$\mathcal{A}_s = (2^Q, \Sigma, \delta_s, Q, F)$$
$$\delta_s(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$$

C'est l'automate des parties, et  $F$  est l'ensemble des singletons de  $Q$ .

## Définition

Le **degré de synchronisation** de  $\mathcal{A}$  est

$$n_{\mathcal{A}} = \min_{w \in \Sigma^*} \{\text{card}(P) \mid \delta(Q, w) = P\}$$

Le degré de synchronisation d'un automate synchronisé est donc... ?

On pose

$$Q_{\min} = \{P \mid \text{card}(P) = n_{\mathcal{A}} \text{ et } P \text{ est accessible dans } \mathcal{A}_s\}$$

Pour un automate synchronisé,  $Q_{\min}$  vaut... ?

# Et nos deux exemples ?

## Road Coloring Problem

Emmanuel Cornet

La conjecture « Road Coloring »

Définitions de départ  
Énoncé de la conjecture

Vers un meilleur étiquetage...

Encore des prérequis  
Exemples

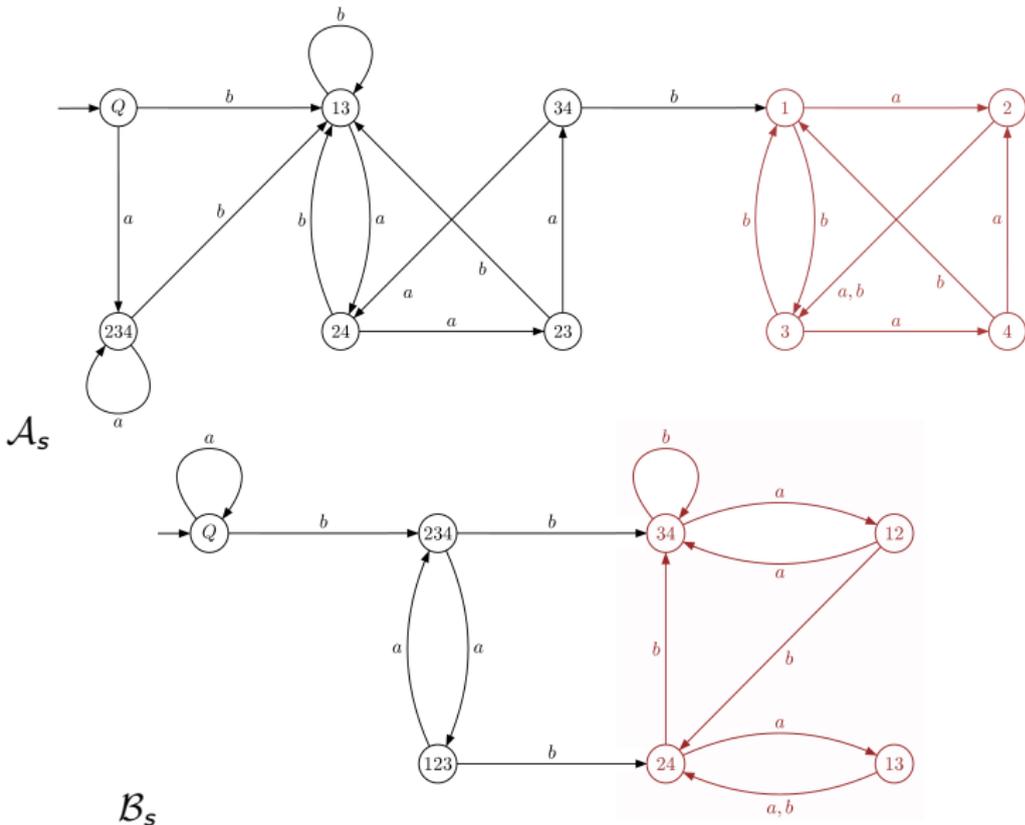
L'automate qui reconnaît les mots synchronisants

Les étiquetages forts

La construction

Une conjecture équivalente

La construction sur un exemple



# Une caractérisation des étiquetages forts

Road Coloring  
Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples  
L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants

Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

La  
construction  
sur un  
exemple

Si un mot  $w$  permet de passer (dans  $\mathcal{A}_s$ ) de  $Q$  à  $Q_{\min}$ , c'est-à-dire

$$\delta_s(Q, w) = \{p_1, \dots, p_{n_A}\}$$

alors  $w$  définit une relation d'équivalence  $\sim_w$  sur  $Q$ , où les classes d'équivalence sont les sous-ensembles  $\{q \mid \delta(q, w) = p_i\}$  pour  $i = 1, \dots, n_A$ .

## Théorème

*L'étiquetage  $\delta$  est fort si et seulement si les partitions induites par  $w$  ne dépendent pas de  $w$ . En outre, si  $\delta$  est fort, les relations  $\sim$  et  $\equiv$  coïncident.*

Lorsque l'étiquetage est fort, on va pouvoir définir un réétiquetage qui réduit le degré de synchronisation.

# Une conjecture équivalente

Road Coloring  
Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples  
L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants  
Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

La  
construction  
sur un  
exemple

La conjecture suivante est équivalente à la conjecture *Road Coloring* :

## Conjecture

*Pour tout graphe acceptable et primitif (avec au moins un sommet), il existe un étiquetage fort.*

Encore une définition (promis, c'est la dernière) :

## Définition

Soit  $\mathcal{P}$  une partition de  $Q$ . Le réétiquetage  $\delta'$  **respecte** la partition  $\mathcal{P}$  si et seulement si pour chaque classe  $P \in \mathcal{P}$  il existe une permutation  $\pi$  de l'alphabet d'entrée telle que

$$\forall p \in P \quad \forall a \in \Sigma \quad \delta'(p, a) = \delta(p, \pi(a))$$

Pour un alphabet à deux lettres, cela signifie que pour chaque classe d'équivalence  $P$ , soit toutes les étiquettes des transitions sortant de  $P$  sont changées, soit aucune ne l'est.

# Construction sur un exemple : synchronisation de $\mathcal{B}$

## Road Coloring Problem

Emmanuel Cornet

La conjecture « Road Coloring »

Définitions de départ  
Énoncé de la conjecture

Vers un meilleur étiquetage...

Encore des prérequis  
Exemples

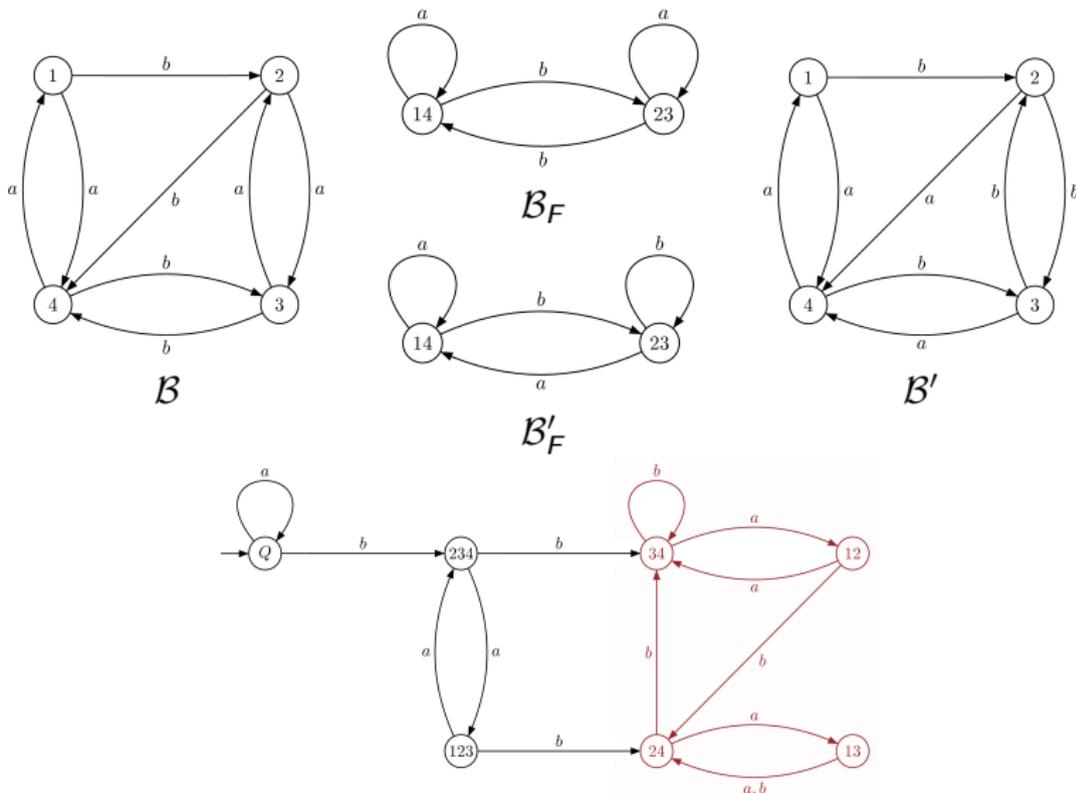
L'automate qui reconnaît les mots synchronisants

Les étiquetages forts

La construction

Une conjecture équivalente

La construction sur un exemple



# Bibliographie

*Road Coloring  
Problem*

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples

L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants

Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

**La  
construction  
sur un  
exemple**

## ■ L'article étudié :

[CKK02] Karel Culik II, Juhani Karhumäki and Jarkko Kari, A Note on Synchronized Automata and Road Coloring Problem, *International Journal of Foundations of Computer Science*, Vol. 13, No. 3 (2002) 459-471

# Retrouvez les documents sur le Web

## Road Coloring Problem

Emmanuel  
Cornet

La conjecture  
« Road  
Coloring »

Définitions de  
départ  
Énoncé de la  
conjecture

Vers un  
meilleur  
étiquetage...

Encore des  
prérequis  
Exemples

L'automate  
qui reconnaît  
les mots syn-  
chronisants

Les  
étiquetages  
forts

La  
construction

Une  
conjecture  
équivalente

**La  
construction  
sur un  
exemple**

Cette présentation est disponible au format PDF à l'adresse

[www.eleves.ens.fr/home/cornet/Road\\_Coloring\\_presentation.pdf](http://www.eleves.ens.fr/home/cornet/Road_Coloring_presentation.pdf)